CÁC TÌM CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI

Dạng 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (dạng đa thức) khi biết các số hạng đầu tiên

Ví dụ 1.1: Cho dãy số (u_n) có dạng khai triển sau: $1;-1;-1;1;5;11;19;29;41;55;.....$
Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát và tìm số tiếp theo?

Bài giải:

Nhận xét: Với 10 số hạng đầu thế này, để tìm ra quy luật biểu diễn là rất khó. Với những cách cho này ta thường làm phương pháp sau:

Đặt: $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$

$\Delta^2 u_k = \Delta u_{k+1} - \Delta u_k$

$\Delta^3 u_k = \Delta^2 u_{k+1} - \Delta^2 u_k$

……..

Ta lập bảng các giá trị $\Delta u_k, \Delta^2 u_k, \Delta^3 u_k$.....nếu đến hàng nào có giá trị không đổi thì dừng lại, sau đó kết luận u_n là đa thức bậc 1, 2, 3,…..và ta đi tìm đa thức đó.

Lời giải:

Bảng giá trị ban đầu:

u_k	1		-1		-1		1		5		11		19		29		41		55
Δu_k		-2		0		2		4		6		8		10		12		14	
$\Delta^2 u_k$			2		2		2		2		2		2		2		2		

Ta thấy hàng của $\Delta^2 u_k$ không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc hai:
$u_n = an^2 + bn + c\,(a \neq 0)$ (1) trong đó n là số thứ tự của các số hạng trong dãy.
Tìm a,b,c như sau:
Cho $n = 1;2;3$ thay vào công thức (1) ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 9a+3b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow u_n = n^2 - 5n + 5$$

Số hạng tiếp theo $u_{11} = 71$

Ví dụ 1.2: Cho dãy số (u_n) có dạng khai triển sau: $-5;-3;11;43;99;185;307;471;....$

Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát và 2 số hạng tiếp theo

Bài giải:

Bảng giá trị ban đầu

u_k	-5		-3		11		43		99		185		307		471
Δu_k		2		14		32		56		86		122		164	
$\Delta^2 u_k$			12		18		24		30		36		42		
$\Delta^3 u_k$				6		6		6		6		6			

Ta thấy hàng của $\Delta^3 u_k$ không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc ba:
$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d\,(a \neq 0)$ (2) trong đó n là số thứ tự của các số hạng trong dãy.
Tìm a, b, c, d như sau:
Cho $n = 1; 2; 3; 4$ thay vào công thức (2) ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-5 \\ 8a+4b+2c+d=-3 \\ 27a+9b+3c+d=11 \\ 64a+16b+4c+d=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=-5 \\ 7a+3b+c=2 \\ 26a+8b+2c=16 \\ 63a+15b+3c=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-5 \\ d=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_n = n^3 - 5n - 1$

Hai số hạng tiếp theo là: $u_9 = 683$; $u_{10} = 949$

Lời bình: Công thức tìm được trên là không duy nhất vì hiển nhiên các số hạng đã cho cũng thỏa mãn, chẳng hạn dãy số sau:

$u_n = n^2 - 5n + 5 + P(n).(n-1)(n-2)(n-3)$ (Của ví dụ 1.1)

$u_n = n^3 - 5n - 1 + P(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ (của ví dụ 1.2)

Với $P(n)$ là một đa thức bất kỳ

Vậy cách tìm trên đây là mới chỉ tìm được một dạng mà dãy số đã cho thỏa mãn mà không tìm được tất cả các dạng mà dãy số đã cho thỏa mãn.

<u>Bài tập tương tự:</u>

Với mỗi dãy số sau đây, hãy tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số

1) $8; 14; 20; 26; 32; .....$ (Đs: $u_n = 6n + 2$)
2) $1; -2; -2; 1; 7; 16; 28; 43; 61; ...$ (Đs: $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 7$)
3) $1; 6; 17; 34; 57; 86; 121; .....$ (Đs: $u_n = 3n^2 - 4n + 2$)

4) $2;3;7;14;24;37;.....$ (Đs: $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 4$)

5) $3;5;10;18;29;.....$ (Đs: $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4$)

6) $2;1;5;14;28;47;71;100;134;173;217;....$ (Đs: $u_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{17}{2}n + 8$)

7) $2;2;8;26;62;122;212;338;....$ (Đs: $u_n = n^3 - 3n^2 + 2n + 2$)

DẠNG 2: Dạng cơ sở: Cho dãy (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n + d, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Với q, d là các hằng số thực.

GIẢI:

- ***Trường hợp 1:*** Nếu $q = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = d, \ n \geq 1 \end{cases}$

  $\Rightarrow u_1 = a$, $u_n = d, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

- ***Trường hợp 2:*** Nếu $q = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d, \ n \geq 1 \end{cases}$

  $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = a$ và công sai bằng d

  $\Rightarrow u_n = a + (n-1)d$

- ***Trường hợp 3:*** Nếu $d = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n, \ n \geq 1 \end{cases}$

  $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = a$ và công bội bằng q

  $\Rightarrow u_n = a.q^{n-1}$

- ***Trường hợp 4:*** Nếu $q \neq 0, q \neq 1, d \neq 0$. Đặt dãy (v_n) sao cho $u_n = v_n + \frac{d}{1-q}$ (1)

  Thay ct(1) vào công thức truy hồi ta có:

  $v_{n+1} + \frac{d}{1-q} = q\left(v_n + \frac{d}{1-q}\right) + d$

  $\Rightarrow v_{n+1} = qv_n, \ n \geq 1$

  $\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{d}{1-q} = a - \frac{d}{1-q}$ và công bội bằng q

  $\Rightarrow v_n = \left(a - \frac{d}{1-q}\right)q^{n-1}, n \geq 1$

$$\Rightarrow u_n = v_n + \frac{d}{1-q} = \left(a - \frac{d}{1-q}\right)q^{n-1} + \frac{d}{1-q}$$

<u>Ví dụ 2.1:</u> Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết:

1) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \;\; n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 3n - 4$)

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \;\; n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 4.2^{n-1} - 3$)

<u>Giải:</u>

1) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \;\; n \geq 1 \end{cases}$

Vì $u_{n+1} = u_n + 3$, $n \geq 1$

$\Rightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$

$\Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -1 + 3(n-1) = 3n - 4$

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

Nhận xét: Dãy số này có dạng 1 với $q = 1, d = 3$

Đặt dãy (v_n) sao cho: $u_n = v_n + \dfrac{d}{1-q} = v_n - 3$ (1)

Thay (1) vào công thức truy hồi ta được

$v_{n+1} - 3 = 2(v_n - 3) + 3 \;\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$ và công bội $q = 2$

$\Rightarrow v_n = 4.2^{n-1} = 2^{n+1}$

$\Rightarrow u_n = v_n - 3 = 2^{n+1} - 3$

<u>Nhận xét:</u> Câu 1: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \;\; n \geq 1 \end{cases}$ Còn có các cách sau:

<u>Cách 2:</u>

Ta có: $u_1 = -1$

$u_2 = u_1 + 3$

$u_3 = u_2 + 3$

……..

$u_n = u_{n-1} + 3$

Cộng vế với vế các hệ thức trên ta được:

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = -1 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + 3(n-1)$

$\Rightarrow u_n = -1 + 3(n-1)$

$\Rightarrow u_n = 3n - 4$

Cách 3:

Dựa vào công thức truy hồi ta tính được dạng khai triển của dãy (u_n) là:

$-1; 2; ; 5; 8; 11; 14; 17; ....$

u_k	-1		2		5		8		11		14		17
Δu_k		3		3		3		3		3		3	

$\Rightarrow u_n = an + b, (a \neq 0)$ (1)

Thay $n = 1$ và $n = 2$ thay vào (1) ta được: $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow u_n = 3n - 4$

<u>Bài tập tương tự:</u> Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết:

1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 7n - 6$)

2) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 2^{n-1}.3$)

3) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = -1$)

4) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{3}{4}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{2^n + 3}{4}$)

5) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{3}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{2^n + 1}{3}$)

Lời bình: Dạng 2 gọi là dạng cơ sở vì:

- Với 3 trường hợp 1, 2, và 3, dãy số trở thành các dãy đặc biệt đó là: dãy số hằng, cấp số cộng và cấp số nhân. Các dãy số này ta đều đã tìm được công thức của số hạng tổng quát.

- Trên cơ sở của 3 dãy này, để giải trường hợp 4: bằng phương pháp đặt một dãy số mới (v_n) liên hệ với dãy số (u_n) bằng một biểu thức nào đó để có thể đưa được về dãy số (v_n) mà (v_n) dãy số hằng hoặc cấp cộng hoặc cấp số nhân.
- Vấn đề đặt ra là: Mối liên hệ giữa (u_n) và (v_n) bởi biểu thức nào mới có thể đưa dãy số (v_n) thành dãy số hằng hoặc cấp số cộng hoặc cấp số nhân hoặc trường hợp 4. Qua quá trình tìm tòi, tôi đã tìm ra được một số dạng sau:

LOẠI 2.1: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n + cn + d, \ \ n \geq 1 \end{cases}$ với $q,c,d \in R$ và $q,c \neq 0$

GIẢI:

- **Trường hợp 1:** Nếu $q = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + cn + d \end{cases}$

Cách 1:

Ta có: $u_1 = a$

$u_2 = u_1 + c.1 + d$

$u_3 = u_2 + c.2 + d$

$u_4 = u_3 + c.3 + d$

…………

$u_n = u_{n-1} + c.(n-1) + d$

Cộng vế với vế các hệ thức trên, ta được:

$$u_n = a + c.1 + c.2 + c.3 + ... + c.(n-1) + (n-1)d \ = a + \frac{cn(n-1)}{2} + (n-1)d$$

Cách 2: Dùng công thức DẠNG 1 (Viết dãy số theo dạng khai triển)

- **Trường hợp 2:** Nếu $q \neq 1$

Đặt dãy (v_n) sao cho: $u_n = v_n + \frac{cn}{1-q}$, thay vào công thức truy hồi ta được

$$v_{n+1} + \frac{c(n+1)}{1-q} = q\left(v_n + \frac{cn}{1-q}\right) + cn + d$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = qv_n + d - \frac{c}{1-q}$$

Từ đó ta có dãy (v_n) với $\begin{cases} v_1 = u_1 - \frac{c}{1-q} \\ v_{n+1} = qv_n + d - \frac{c}{1-q} = qv_n + d', \ \ n \geq 1 \end{cases}$ Khi đó dãy (v_n) lại có DẠNG 1

<u>Ví dụ 2.2:</u> Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết:

1) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \ n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{3n^2 - 7n + 14}{2}$)

2) $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \ n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 10^n + n$)

3) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6n + 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 3n + 1 - 3^n$)

<u>Bài giải:</u>

1) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \ n \geq 1 \end{cases}$

<u>Cách 1:</u>

Ta có:

$u_1 = 5$

$u_2 = u_1 + 3.1 - 2$

$u_3 = u_2 + 3.2 - 2$

$u_4 = u_3 + 3.3 - 2$

$u_5 = u_4 + 3.4 - 2$

…………..

$u_n = u_{n-1} + 3.(n-1) - 2$

Cộng vế với vế ta được:

$$\Rightarrow u_n = 5 + 3.1 + 3.2 + 3.3 + ... + 3.(n-1) - 2(n-1) = 5 + \frac{3(n-1)n}{2} - 2(n-1) = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}$$

<u>Cách 2:</u>

Ta có dạng khai triển của dãy số (u_n) là:

$5; 6; 10; 17; 27; 40; 56; 75; .....$

u_k	5		6		10		17		27		40		56		75
Δu_k		1		4		7		10		13		16		19	
$\Delta^2 u_k$			3		3		3		3		3		3		

$\Rightarrow u_n = an^2 + bn + c$ (*)

Thay $n = 1, n = 2, n = 3$ vào (*) ta được:

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ 4a+2b+c=6 \\ 9a+3b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=-\dfrac{7}{2} \\ c=7 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{7}{2}n + 7 = \dfrac{3n^2-7n+14}{2}$

2) $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \quad n \ge 1 \end{cases}$

Đặt dãy (v_n) sao cho: $u_n = v_n + n, n \ge 1$

Thay vào công thức truy hồi ta được:

$v_{n+1} + n + 1 = 10(v_n + n) + 1 - 9n$

$\Rightarrow v_{n+1} = 10v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - 1 = 10$ và công bội $q = 10$

$\Rightarrow v_n = 10.10^{n-1} = 10^n$

$\Rightarrow u_n = 10^n + n$

3) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6n + 1 \end{cases}$

Đặt dãy (v_n) sao cho: $u_n = v_n + 3n$, thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được:

$v_{n+1} + 3(n+1) = 3(v_n + 3n) - 6n + 1$

$\Rightarrow v_{n+1} = 3v_n - 2$

$\Rightarrow (v_n)$ được xác định bởi: $\begin{cases} v_1 = u_1 - 3 = -2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2, \quad n \ge 1 \end{cases}$

Đặt dãy (y_n) sao cho $v_n = y_n + 1, n \ge 1$, thay vào công thức truy hồi của dãy (v_n) ta được

$y_{n+1} + 1 = 3(y_n + 1) - 2$

$\Rightarrow y_{n+1} = 3y_n$

$\Rightarrow (y_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $y_1 = v_1 - 1 = -2 - 1 = -3$ và công bội $q = 3$

$y_n = -3.3^{n-1} = -3^n$

$\Rightarrow v_n = -3^n + 1$

Vây: $u_n = -3^n + 1 + 3n$

Bài tập tương tự: Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết:

1) $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 100 - n^2$)

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \quad n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$)

3) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^2, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 1 + 2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right) = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{3}$

LOẠI 2.2: Cho dãy (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n + rc^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ với $q \neq 0$

GIẢI:

- **Trường hợp 1:** Nếu $q = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + rc^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ ta có thể làm bằng phương pháp sau:

  Ta có: $u_1 = a$

  $u_2 = u_1 + rc^1$

  $u_3 = u_2 + rc^2$

  $u_4 = u_3 + rc^3$

  ………………..

  $u_n = u_{n-1} + rc^{n-1}$

  Cộng vế với vế ta được:

  $$u_n = a + (c + c^2 + c^3 + ... + c^{n-1})r = a + \frac{c(c^{n-1} - 1)r}{c - 1}$$

- **Trường hợp 2:** Nếu $c \neq q \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n + rc^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

  Đặt dãy (v_n) sao cho: $u_n = v_n + \frac{rc^n}{c - q}$, thay vào công thức truy hồi ta được

  $$v_{n+1} + \frac{rc^{n+1}}{c - q} = q\left(v_n + \frac{rc^n}{c - q}\right) + rc^n$$

  $\Rightarrow v_{n+1} = qv_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{rc}{c-q} = a - \frac{rc}{c-q}$ và công bội bằng q

$$\Rightarrow v_n = \left(a - \frac{rc}{c-q}\right)q^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n + \frac{rc^n}{c-q} = \left(a - \frac{rc}{c-q}\right)q^{n-1} + \frac{rc^n}{c-q}$$

- **<u>Trường hợp 3:</u>** Nếu $c = q \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a \\ u_n = qv_n + rq^n, \ n \geq 1 \end{cases}$

  Đặt dãy số (v_n) sao cho: $u_n = q^n.v_n$, thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được

  $$q^{n+1}v_{n+1} = q\left(q^n v_n\right) + rq^n$$

  $$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{r}{q}$$

  $\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = \frac{u_1}{q} = \frac{a}{q}$ và công sai $d = \frac{r}{q}$

<u>Ví dụ 2.3:</u> Cho dãy (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$ với $n \in N^*$.

Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) (Đs: $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$)

<u>Bài giải:</u>

<u>Cách 1:</u>

Ta có:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_4 = u_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

…………

$$u_n = u_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Cộng vế với vế ta được:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Cách 2:

Đặt dãy số (v_n) sao cho: $u_n = v_n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}} = v_n - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ thay vào công thức truy hồi ta được:

$$v_{n+1} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = v_n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n$

$\Rightarrow$ dãy (v_n) được xác định bởi: $\begin{cases} v_1 = u_1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ v_{n+1} = v_v \end{cases}$

$\Rightarrow v_n = v_1 = 2, n \geq 1$

Vậy: $u_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Ví dụ 2.4: Viết công thức của số hạng tổng quát của các dãy số (u_n) với:

1) $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 5.2^{n-1} + 3^n$)

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3^n, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 5^{n-1}\right)$)

3) $\begin{cases} u_1 = 101 \\ u_{n+1} = 7u_n + 7^{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = n.7^n + 94.7^{n-1}$)

4) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = 3n.2^n - 5.2^{n-1}$)

5) $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n.3^n, n \geq 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \frac{3-3^{n+1}}{2} + n.3^n$)

Bài giải:

1) $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n, n \ge 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = v_n + 3^n, n \ge 1$ thay vào công thức truy hội của dãy (u_n) ta được:

$v_{n+1} + 3^{n+1} = 2(v_n + 3^n) + 3^n$

$\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - 3 = 5$ và công bội $q = 2$

$\Rightarrow v_n = 5.2^{n-1}$

$\Rightarrow u_n = 5.2^{n-1} + 3^n$

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3^n, n \ge 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = v_n + \frac{3^n}{2}$ thay vào công thức truy hồi ta được

$v_{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2} = 5\left(v_n + \frac{3^n}{2}\right) - 3^n$

$\Rightarrow v_{n+1} = 5v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ và công bội $q = 5$

$\Rightarrow v_n = -\frac{1}{2}.5^{n-1}$

$\Rightarrow u_n = -\frac{1}{2}.5^{n-1} + \frac{1}{2}.3^n = \frac{1}{2}(3^n - 5^{n-1})$

3) $\begin{cases} u_1 = 101 \\ u_{n+1} = 7u_n + 7^{n+1}, n \ge 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = 7^n v_n$ thay vào công thức truy hồi ta được

$7^{n+1} v_{n+1} = 7.7^n v_n + 7^{n+1}$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1$

$\Rightarrow (v_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = \frac{u_1}{7} = \frac{101}{7}$ và công sai $d = 1$

$\Rightarrow v_n = \frac{101}{7} + n - 1 = n + \frac{94}{7}$

$\Rightarrow u_n = n.7^n + 94.7^{n-1}$

4) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n, n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = 2^n v_n, n \geq 1$ thay vào công thức truy hồi ta được

$2^{n+1} v_{n+1} = 2.2^n v_n + 6.2^n$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 3$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = \frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}$ và công sai $d = 3$

$\Rightarrow v_n = \frac{1}{2} + (n-1)3 = 3n - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow u_n = \left(3n - \frac{5}{2}\right).2^n = 3n.2^n - 5.2^{n-1}$

5) $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n.3^n, n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = 3^n v_n, n \geq 1$ thay vào biểu thức truy hồi của dãy (u_n) ta được

$3^{n+1} v_{n+1} = 3^n v_n + 2n.3^n$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n + \frac{2}{3} n$

$\Rightarrow$ dãy (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = \frac{u_1}{2} = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n + \frac{2}{3} n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $v_n = y_n + n$ thay vào công thức truy hồi của dãy (v_n) ta được

$y_{n+1} + n + 1 = \frac{1}{3}(y_n + n) + \frac{2}{3} n$

$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{3} y_n - 1$

$\Rightarrow (y_n)$ xác định bởi $\begin{cases} y_1 = v_1 - 1 = -1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{3} y_n - 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $y_n = t_n - \frac{3}{2}$ thay vào công thức truy hồi của dãy (y_n) ta được

$t_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(t_n - \frac{3}{2}\right) - 1$

$\Rightarrow t_{n+1} = \frac{1}{3} t_n$

$\Rightarrow (t_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $t_1 = y_1 + \frac{3}{2} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{3}$

…………………

$\Rightarrow u_n = \frac{3 - 3^{n+1}}{2} + n.3^n$

LOẠI 2.3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{cu_n}{q + du_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

GIẢI:

Đặt dãy số (v_n) sao cho: $u_n = \frac{1}{v_n}$ thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta đươc

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{\frac{c}{v_n}}{q + \frac{d}{v_n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{c}{qv_n + d}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{q}{c}v_n + \frac{d}{c}$$

$\Rightarrow (v_n): \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{a} \\ v_{n+1} = \dfrac{q}{c}v_n + \dfrac{d}{c}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ quay về DẠNG 1

LOẠI 2.4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{b + cu_n}{p + ru_n}, n \geq 1 \end{cases}$

GIẢI:

Đặt $u_n = v_n + \alpha, n \geq 1$ thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được

$$v_{n+1} + \alpha = \frac{b + c(v_n + \alpha)}{p + r(v_n + \alpha)}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{b + c\alpha + cv_n - \alpha p - \alpha r v_n - \alpha^2}{p + r(v_n + \alpha)}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\left[-\alpha^2 + \left(-p+c\right)\alpha + b\right] + \left(c - r\alpha\right)v_n}{\left(p + r\alpha\right) + rv_n}$$

Để dãy (v_n) trở về loại 2.3, ta chọn α là nghiệm của phương trình $-\alpha^2 + \left(-r+c\right)\alpha + b = 0$

<u>Ví dụ 2.5:</u> Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) sau, biết:

1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}, \ n \ge 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{1}{n}$)

2) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}, \ n \ge 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{1}{3.2^{n-2} - 1}$)

3) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$)

4) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1-4u_n}{1-6u_n}, \ n \ge 1 \end{cases}$ (Đs: $u_n = \dfrac{1}{2^{n+2} - 6} + \dfrac{1}{2}$)

<u>Bài giải:</u>

1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}, \ n \ge 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được:

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{v_n}}{1 + \dfrac{1}{v_n}}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{1+v_n}$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1$

Dãy (v_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = 1$, công sai $d = 1$

$\Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = 1 + n - 1 = n$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{n}$

2) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ thay vào công thức truy hồi của dãy (u_n) ta được:

$\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{v_n}}{2 + \dfrac{1}{v_n}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2v_n + 1}$

$\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n + 1$

Đặt $v_n = y_n - 1$ thay vào dãy (v_n) ta được:

$y_{n+1} - 1 = 2(y_n - 1) + 1$

$\Rightarrow y_{n+1} = 2y_n$

$\Rightarrow (y_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $y_1 = v_1 + 1 = \dfrac{1}{u_1} + 1 = \dfrac{3}{2}$ và công bội $q = 2$

$\Rightarrow y_n = \dfrac{3}{2}.2^{n-1} = 3.2^{n-2}$

$\Rightarrow v_n = y_n - 1 = 3.2^{n-2} - 1$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{3.2^{n-2} - 1}$

3) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

Đặt dãy số (v_n) sao cho: $u_n = v_n + \alpha$ thay vào dãy (u_n) ta được:

$v_{n+1} + \alpha = \dfrac{1}{2 - v_n - \alpha}$

$\Rightarrow v_{n+1}=\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1+\alpha v_n}{2-\alpha-v_n}$

Chọn α là nghiệm của phương trình: $\alpha^2-2\alpha+1=0\ \Rightarrow \alpha=1$

$\Rightarrow u_n=v_n+1$ và $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{1-v_n}$

Đặt dãy số (y_n) sao cho: $v_n=\dfrac{1}{y_n}$ thay vào dãy (v_n) ta được:

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{\frac{1}{y_n}}{1-\frac{1}{y_n}}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{1}{y_n-1}$

$\Rightarrow y_{n+1}=y_n-1$

$\Rightarrow (y_n)$ là cấp số cộng có số hạng đầu $y_1=\dfrac{1}{v_1}=\dfrac{1}{u_1-1}=-2$ và công sai $d=-1$

$\Rightarrow y_n=-2+(n-1)(-1)=-n-1$

$\Rightarrow v_n=\dfrac{1}{y_n}=-\dfrac{1}{n+1}$

$\Rightarrow u_n=v_n+1=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

4) $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1-4u_n}{1-6u_n}, \quad n\ge 1 \end{cases}$

Đặt dãy (v_n) sao cho $u_n=v_n+\alpha$, thay vào công thức truy hồi ta được

$v_{n+1}+\alpha=\dfrac{1-4(v_n+\alpha)}{1-6(v_n+\alpha)}$

$\Rightarrow v_{n+1}=\dfrac{(6\alpha^2-5\alpha+1)+(6\alpha-4)}{1-6(v_n+\alpha)}$

=> chọn $\alpha=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình $6\alpha^2-5\alpha+1=0$

Khi đó $u_n=v_n+\dfrac{1}{2}$ và dãy số (v_n) được xác định bởi $\begin{cases} v_1=\dfrac{1}{2} \\ v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2+6v_n} \end{cases}$

Đặt dãy số (y_n) sao cho $v_n=\dfrac{1}{y_n}$ thay vào công thức truy hồi của dãy (v_n) ta được:

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{1}{y_n}}{2 + \frac{6}{y_n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{2y_n + 6}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = 2y_n + 6$$

(y_n) được xác định bởi $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = 2y_n + 6, n \geq 1 \end{cases}$

Đặt dãy số (x_n) sao cho $y_n = x_n - 6$ thay vào công thức truy hồi của dãy (y_n) ta được

$$x_{n+1} - 6 = 2(x_n - 6) + 6$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = 2x_n$$

$\Rightarrow (x_n)$ là cấp số nhân với $x_1 = y_1 + 6 = 8$ và công bội $q = 2$

$$\Rightarrow x_n = 8.2^{n-1} = 2^{n+2}$$

$$\Rightarrow y_n = 2^{n+2} - 6$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{2^{n+2} - 6}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2^{n+2} - 6} + \frac{1}{2}$$

<u>Bài tập tương tự:</u> Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) sau, biết:

1) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 2}{3u_n - 1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

2.3. Sử dụng máy tính casio để tìm các số hạng trong một dãy số được cho bởi công thức truy hồi:

Theo dự án mới của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo, từ năm học 2016 – 2017 kỳ thi THPT Quốc gia, bộ môn Toán thi bằng phương pháp trắc nghiệm. Vậy, với một bài toán về dãy số mà dãy số đó cho bởi công thức truy hồi thì phải giải thế nào? Có phải tìm công thức của số hạng tổng quát hay không?

Sau đây tôi xin giới thiệu quy trình bấm máy tính casio để tìm giá trị u_k của một dãy số cho bởi biểu thức truy hồi

<u>Ví dụ 3.1:</u> Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. Tính u_8?

<u>Bài giải:</u>

+ Gán giá trị của $u_1 = 1$ vào biến A: 1 SHIFT STO A
+ Dùng biến D làm biến đếm, công thức truy hồi bắt đầu được tính từ u_2, nên ta gán cho biến đếm D giá trị khởi đầu là 1: 1 SHIFT STO D
+ Biểu thức lặp: Khi biến đếm D tăng lên 1 đơn vị thì $u_2 = u_1 + 3 = A + 3$ và ta lại gán giá trị của u_2 vào biến A, cứ như vậy biều thức được lặp lại. Nên ta có biểu thức lặp như sau: $D = D + 1 : A = A + 3$
+ Sau đó bấm phím CACL và liên tiếp các dấu "=" cho đến khi giá trị $D = D + 1 = 8$ thì tính được u_8.

<u>Tóm lại quy trình bấm máy như sau:</u>
1 SHIFT STO A
1 SHIFT STO D
$D = D + 1 : A = A + 3$
CACL = = = ……=
Cho đến khi trên màn hình có $D = D + 1 = 8$ **bấm tiếp dấu "=" ta được** $A = u_8 = 22$

Chú ý: Các ký hiệu "=" và ":" trong biểu thức lặp $D = D + 1 : A = A + 3$ là những phím màu đỏ trên bàn phím của máy tính casio, nên ta phải bấm tổ hợp phím ALPHA và dấu "=", dấu ":" màu đỏ. Còn dấu "=" sau khi gọi phím CACL = = = ……= là dấu "=" màu đen trên màn phím máy tính casio.

<u>Ví dụ 3.2:</u> Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -1 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$ Tính u_7?

<u>Bài giải:</u>

Vì công thức truy hồi được tính theo 2 số hạng đứng ngay trước nó, nên ta cần dùng đến 2 biến A và B cho 2 số hạng đó và phải dùng tới 2 lần lặp. Quy trình bấm máy như sau:
2 SHIFT STO A
-1 SHIFT STO B
2 SHIFT STO D
$D = D + 1 : A = B + 2A : D = D + 1 : B = A + 2B$
CACL = = = ….=
Cho đến khi $D = D + 1 = 7$ **bấm tiếp dấu "=" nữa ta được** $u_7 = 23$

Lời bình: Với quy trình này học sinh không phải dùng nháp và tính từng bước từ công thức truy hồi hoặc không phải tìm công thức của số hạng tổng quát đồng thời cũng có lợi khi bài toán yêu cầu tìm u_k với k hơi lớn (VD: u_{40}, u_{45})

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Số hạng u_4 của dãy số là:

A. 1 **B.** $\frac{9}{8}$ **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Bài 2: Cho dãy số hữu hạn (u_n) có dạng khai triển là: $1;\ -1;\ -1;\ 1;\ 5;\ 11;\ 19;\ 29;\ 41;\ 55;$ Khi đó công thức tổng quát của dãy số là:

A. $u_n = n^2 + 3n - 1$ **B.** $u_n = n^2 - 3n - 1$

C. $u_n = n^2 - 5n + 5$ **D.** $u_n = n^2 - 2n$

Bài 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, n \geq 1 \end{cases}$ Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

A. $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ **B.** $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

C. $u_n = \dfrac{2^n + 3}{2^n}$ **D.** $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}$

Với bài số 2: Ta sử dụng MODE 7 để kiểm tra từng đáp án
Quy trình bấm như sau:

MODE 7
$F(x) = x^2 + 3x - 1$
START 1
END 10
STEP 1
Sau đó dò trên cột $f(x)$. Nếu cột này trùng với các giá trị của các số hạng trong dãy số thì ta chọn biểu thức đó.
Chú ý: Với máy casio fx – 570 VN PLUS ta có thể kiểm tra một lúc 2 đáp án qua 2 hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng phím chuyển đổi: SHIFT MODE ▼ 5 2

2.4. Các bài toán thi học sinh giỏi các cấp:

Bài 1: ***(Đề thi chọn HSG môn toán lớp 11 của trường THPT Vũng Tàu năm học 2014 – 2015)***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng $u_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài giải:

Cách 1:

Ta có: $u_1 = 1$

$$u_2 = u_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_3 = u_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_4 = u_3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

………………..

$$u_n = u_{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Cách 2:

Đặt dãy số (v_n) sao cho $u_n = v_n + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2} - 1} = v_n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ thay vào biểu thức truy hồi ta được

$$v_{n+1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = v_n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là một dãy số hằng

$$\Rightarrow v_n = v_1 = u_1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Cách 3: Chứng minh quy nạp

Bài 2: ***(Đề thi Olympic 27/4 môn Toán – lớp 11 của Sở GD và ĐT Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2012 – 2013)***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + \left(1 - \sqrt{2}\right)u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính u_{2013}

Bài giải:

Đặt dãy số (v_n) sao cho $u_n = \tan v_n$, thay vào công thức truy hồi ta được:

$$\tan v_{n+1} = \frac{\tan v_n + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{8}.\tan v_n}$$

$$\Rightarrow \tan v_{n+1} = \tan\left(v_n + \frac{\pi}{8}\right)$$

=> chọn $v_{n+1} = v_n + \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số cộng với số hạng đầu $\sqrt{3} = \tan v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\pi}{3}$ và công sai $d = \frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow v_n = \frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow u_n = \tan\left[\frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{8}\right]$$

$$u_{2013} = \tan\left[\frac{\pi}{3} + \frac{2012\pi}{8}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$